Analysis

Schnittpunkte einer Funktion mit den Achsen berechnen

$f(x) = 4x + 8$

Schnitt mit y-Achse: 0 einsetzen für x!

$f(0) = 4 \cdot 0 + 8 = 8$ $\qquad S_y\,(0|8)$

Schnitt mit x-Achse: $f(x) = 0$ setzen (für y 0 einsetzen)

$f(x) = 4x + 8$

$y = 4x + 8$

$0 = 4x + 8$

$-2 = x$ $\qquad S_x\,(-2|0)$

Ableitungen berechnen

$f(x)$	x^3	x^2	x	c	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	0	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Faktorregel:

$f(x) = a \cdot x^n \longrightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

Bsp.: $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^{10} \longrightarrow f'(x) = 10x^9$

$f(x) = 3x^4 \longrightarrow f'(x) = 12x^3$

Summenregel:

$f(x) = 3x^2 + 6x^{-1} \longrightarrow f'(x) = 6x - 6x^{-2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2 = x^{\frac{2}{3}} + 2x^0 \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

Zusatz: $f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Äußere mal innere Ableitung

Bsp.: $f(x) = 2 \cdot (\underbrace{2x^2-4}_{})^8$

$f'(x) = 2 \cdot 8 \cdot (2x^2-4)^7 \cdot (4x)$

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Bsp.: $f(x) = x^2 \cdot e^x \longrightarrow f(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$f(x) = e^{2x}(4x^2+x^3)$

$\longrightarrow$

$f'(x) = 2e^{2x}(4x^2+x^3) + e^{2x}(8x+3x^2)$

$= e^{2x}(8x^2+2x^3+8x+3x^2)$

$= e^{2x}(2x^3+11x^2+8x)$

Natürliche Exponentialfunktion:

Ableiten von e^x

$f(x)$	e^x	$10+2 \cdot e^x$	$e^{2 \cdot x}$	e^{x^2}	$20 \cdot e^{x^3}$	$2x+e^{-4x^3}$	$2 \cdot x \cdot e^{-4x^3}$
$f'(x)$	e^x	$2 \cdot e^x$	$2 \cdot e^{2 \cdot x}$	$2x \cdot e^{x^2}$	$3x^2 \cdot 20 \cdot e^{x^3}$	$2-12x^2 \cdot e^{-4x^3}$	$u' \cdot v + u \cdot v'$

HP/TP/WP berechnen/bestimmen

Beispiel für TP & HP:

1. Alle 3 Ableitungen bestimmen
2. 1. Ableitung gleich 0 setzen
3. Zur Überprüfung werden Kandidaten in die 2 Ableitung eingesetzt

4. Punkte (Y-Werte) ausrechnen (X in Ursprungsfunktion einsetzen)

$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + 3x^2 + 4x$

$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$ ⟶ Ableitungen bilden

$f''(x) = 4x + 6$

$f'''(x) = 4$

$0 = 2x^2 + 6x + 4 \quad |:2$ ⟶ $f'(x)$ gleich 0 setzen

$0 = x^2 + 3x + 2 \qquad p = +3 \quad q = +2$ ⟶ P-q-Formel

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$

$= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right\}$ X-Werte in $f''(x)$ einsetzen (Steigung ist gleich 0)

$f''(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 = 2$ ⟶ wenn >0 TP

$f''(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2$ ⟶ wenn <0 HP

$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + 3x^2 + 4x$ ⟶ X-Werte in $f(x)$ einsetzen

$f(-1) = \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = \underline{-\frac{5}{3}}$ $\quad TP(-1 \mid \underline{-\frac{5}{3}})$

$f(-2) = \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = \underline{-\frac{4}{3}}$ $\quad HP(-2 \mid \underline{-\frac{4}{3}})$

Beispiel für WP:

1. Alle 3 Ableitungen bestimmen
2. 2 Ableitung gleich 0 setzen & nach x auflösen
3. Mit der 3 Ableitung Kandidat für WP überprüfen
4. Y-Koordinate berechnen

$f(x) = -\frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 1$

$f'(x) = -\frac{3}{4} x^2 + 3x$ ⟶ Ableitungen bilden

$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$

$f'''(x) = -\frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{2}x + 3 \quad | + \frac{3}{2}x$ → $f''(x)$ gleich 0 setzen und nach x auflösen

$\frac{3}{2}x = 3 \quad | : \frac{3}{2}$

$x = 2$ → Kandidat für einen Wendepunkt

$f'''(x) = -\frac{3}{2}$ → X-Wert in 3 Ableitung einsetzen

$f'''(2) = -\frac{3}{2}$ → *wenn $\neq 0$ ist ein WP

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ → für Y-Wert den X-Wert in $f(x)$ einsetzen

$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 1 = \underline{5}$ WP(2|5)

*Falls die 3 Ableitung = 0 wird:

→ Krümung vor und nach 0 muss geprüft werden

$f''(x) = 4x^3$ → Wert der >0 & <0 muss jeweil in $f''(x)$ eingesetzt werden

$f''(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$ → rechts Kurve

$f''(1) = 4 \cdot (1)^3 = 4$ → Links Kurve

→ wenn sich das Vorzeichen wechselt ist es ein WP

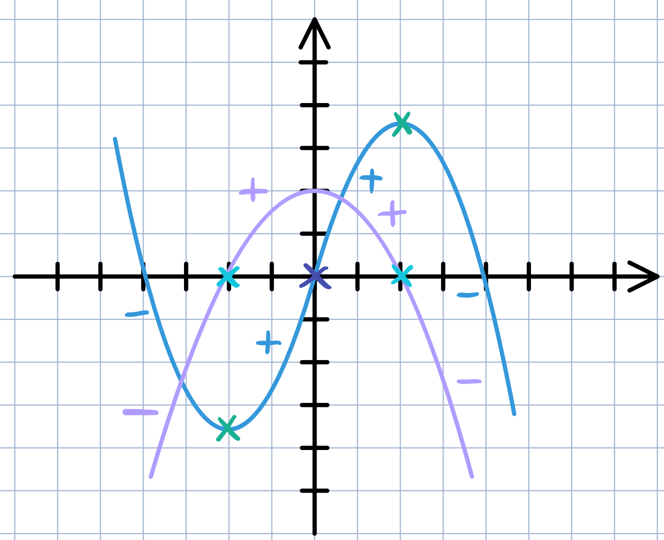
---

graphisch Ableiten

f' beschreibt die Steigung

TP & HP werden zu Nullstellen

WP werden zu Extrempunkten (TP & HP)



Tangente rechnerisch bestimmen

1. Punkt berechnen
2. m berechnen
3. b berechnen

$y = m \cdot x + b$

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2$ ⟶ 2 in x einsetzen

$f(2) = \underline{2}$ ⟶ Punkt = P(2|2)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ⟶ ableiten

$f'(2) = -3$ ⟶ 2 in erste Ableitung für x einsetzen

$m = -3$ ⟶ Ergebnis ist m

$y = -3 \cdot x + b$ ⟶ Punkt$(\underset{x}{2}|\underset{y}{2})$ und m einsetzen

$2 = -3 \cdot 2 + b$ ⟶ Gleichung auflösen/b berechnen

$2 = -6 + b \quad |+6$

$8 = b$ ⟶ Ergebnis ist b

Alle Werte in $y = m \cdot x + b$ einsetzen

$\underline{\underline{y = -3x + 8}}$

Normale rechnerisch bestimmen

1. Punkt berechnen
2. Ableitung
3. Steigung m
4. Zwischenschnitt

5. Punktsetzen, b berechnen

$n(x) = m \cdot x + b$

Beispiel:

$f(x) = x^3 \quad x_0 = 2$ $\longrightarrow$ 2 in x einsetzen

$f(2) = \underline{8}$ $\longrightarrow$ Punkt = $P(2|\underline{8})$

$f'(x) = 3x^2$ $\longrightarrow$ ableiten

$m = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{3 \cdot 2^2} = -\frac{1}{12}$ $\longrightarrow$ 2 in erste Ableitung für X einsetzen = m

$n(x) = -\frac{1}{12} \cdot x + b$ $\longrightarrow$ Punkt$(\underset{x}{2}|\underset{y}{8})$ und m einsetzen

$8 = -\frac{1}{12} \cdot 2 + b$ $\longrightarrow$ Gleichung auflösen / b berechnen

$8 = -\frac{1}{6} + b \quad |+\frac{1}{6}$

$\frac{49}{6} = b$ $\longrightarrow$ Ergebnis ist b

Alle Werte in $n(x) = m \cdot x + b$ einsetzen

$\underline{\underline{n(x) = \frac{1}{12}x + \frac{49}{6}}}$

Graphen skizzieren